Construction des courbes en cordonnées polaires.

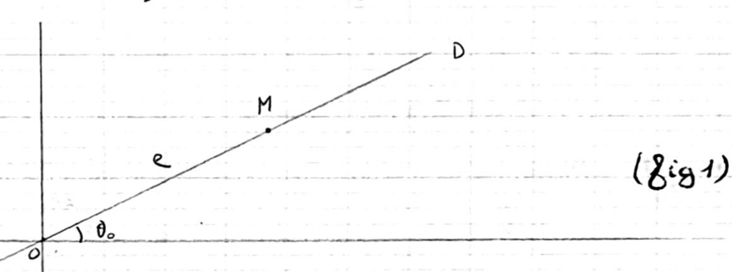
(5)

L'emploi des cordonnées polaires permet de représenter très simplement certaines courbes et, par suite, de faciliter les calculs.

Equations de courbes fondamentales.

Equation de la droite.

* Droite passant par O : $\theta = \theta_0$, et ceci $\forall\ \rho = OM$



(fig 1)

* Droite ne passant pas par O.

(D) : $ax + by + c = 0$ avec $c \neq 0$

Remplaçons x par $\rho \cos\theta$ et y par $\rho \sin\theta$.

$a \rho \cos\theta + b \rho \sin\theta + c = 0$

$$\rho = \frac{-c}{a \cos\theta + b \sin\theta}$$

$$\rho = \frac{1}{-\frac{a}{c}\cos\theta - \frac{b}{c}\sin\theta}$$

Posons $A = -\frac{a}{c}$ et $B = -\frac{b}{c}$.

$ax + by + c = 0$ (D)

$\vec{u}(\cos\alpha, \sin\alpha)$
$\vec{u} \perp \vec{v}$

(fig 2)

$$\rho = \frac{1}{A\cos\theta + B\sin\theta} \quad (1)$$

Inversement, si on nous donne (1), on en déduit : $Ax + By = 1$.

1. Remarque : si (D) // Ox, $a = 0 \vdash A = 0$ et $\rho = \frac{a'}{\sin\theta}$ $(y = a')$.

2. Remarque importante :

Posons $p = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ / $\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = Ap$

$\sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = Bp$

Z

(1) : $\rho = \dfrac{p}{\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha}$

$$\boxed{\rho = \frac{p}{\cos(\theta-\alpha)} \quad (2)}$$

L'équation cartésienne correspondante est :

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

C'est l'équation de la droite perpendiculaire en P à la droite OP, où P $(p\cos\alpha, p\sin\alpha)$.

Équation du cercle

Nous n'en calculerons pas dans le cas général. 2 cas particuliers :

- cercle de centre O.
- cercle passant par O.

* cercle de centre O.

C'est : $\rho = R, \quad \forall\theta$.

* cercle passant par O.

Son équation cartésienne est : $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=0$ (1)

Le centre $\omega(\alpha,\beta)$

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

(1) : $\rho^2 - 2\alpha\rho\cos\theta - 2\beta\rho\sin\theta = 0$.

si $\rho\neq 0$, $\rho = 2\alpha\cos\theta + 2\beta\sin\theta$ (2)

Mais en supposant $\rho\neq 0$, on suppose que $M\neq O$? Il n'en n'est rien car $\rho=0$ s'obtient en (2) quand $\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=0$

c'est à dire : $\underbrace{\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}_{\cos\alpha}\cos\theta + \underbrace{\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}_{\sin\alpha}\sin\theta = 0 \quad \mapsto \quad \cos(\alpha-\theta)=0$

Réciproquement, multiplions les 2 membres de l'équation (2) par ρ :

$$\rho^2 - 2\alpha\rho\cos\theta - 2\beta\rho\sin\theta = 0.$$

oui.

Nous retiendrons par coeur :

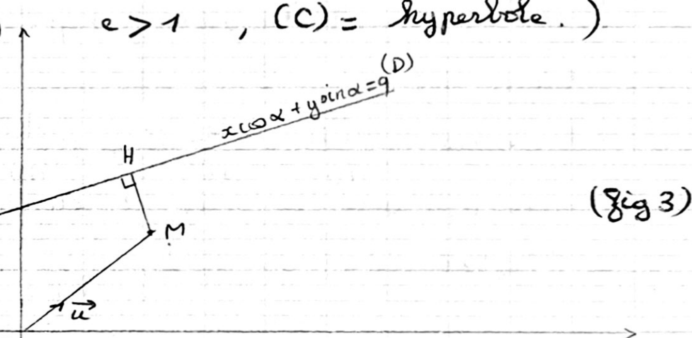
équation d'un cercle passant par O : $\rho = A\cos\theta + B\sin\theta$ centre de ce cercle : $\omega\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$

Coniques de foyer O

(D) = directrice associée : $x\cos\alpha + y\sin\alpha - q = 0$ (but de simplification)

$(C) = \{M \in (P) / \ OM = e\ MH\}$

e = excentricité (rappel, si $e<1$, (C) = ellipse.
$e=1$, (C) = parabole.
$e>1$, (C) = hyperbole.)



(fig 3)

$\|\overrightarrow{OM}\| = |\rho|$ et $\|\overrightarrow{MH}\| = d(M,(D)) = \dfrac{|\rho\cos\theta\cos\alpha + \rho\sin\theta\sin\alpha - q|}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}$

Ainsi : $|\rho| = e\,|\rho\cos(\theta-\alpha) - q|$

soit $\rho = e\rho\cos(\theta-\alpha) - eq$ ou $\rho = -e\rho\cos(\theta-\alpha) + eq$

Résolvons en ρ :

$$\rho_1 = -\frac{eq}{1 - e\cos(\theta-\alpha)} \quad \text{ou} \quad \rho_2 = \frac{eq}{1 + e\cos(\theta-\alpha)}$$

Ces 2 ensembles représentent le même ensemble de points puisque $\rho_1(\pi+\theta) = -\rho_2(\theta)$ et : $\begin{cases} \overrightarrow{OM_1} = -\rho_2(-\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}) = \overrightarrow{OM_2} \\ \overrightarrow{OM_2} = \rho_1(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) \end{cases}$ donc $M_1 = M_2 = M$

$p = eq$ = paramètre de la conique.

(C) :

$\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta-\alpha)}$

La réciproque aboutirait aussi. Nous conseillons au lecteur de revoir son cours

de terminale sur les coniques, et d'en retenir absolument par coeur les formules fondamentales.

(fig 4)

Tangente en un point

* tgte à l'origine.

ρ s'annule pour une certaine valeur θ_0 de l'angle polaire θ.

La tgte en O à (C) a pour équation polaire $\theta = \theta_0$ (pour $\rho = 0$).

* tgte en un pt autre que le pôle.

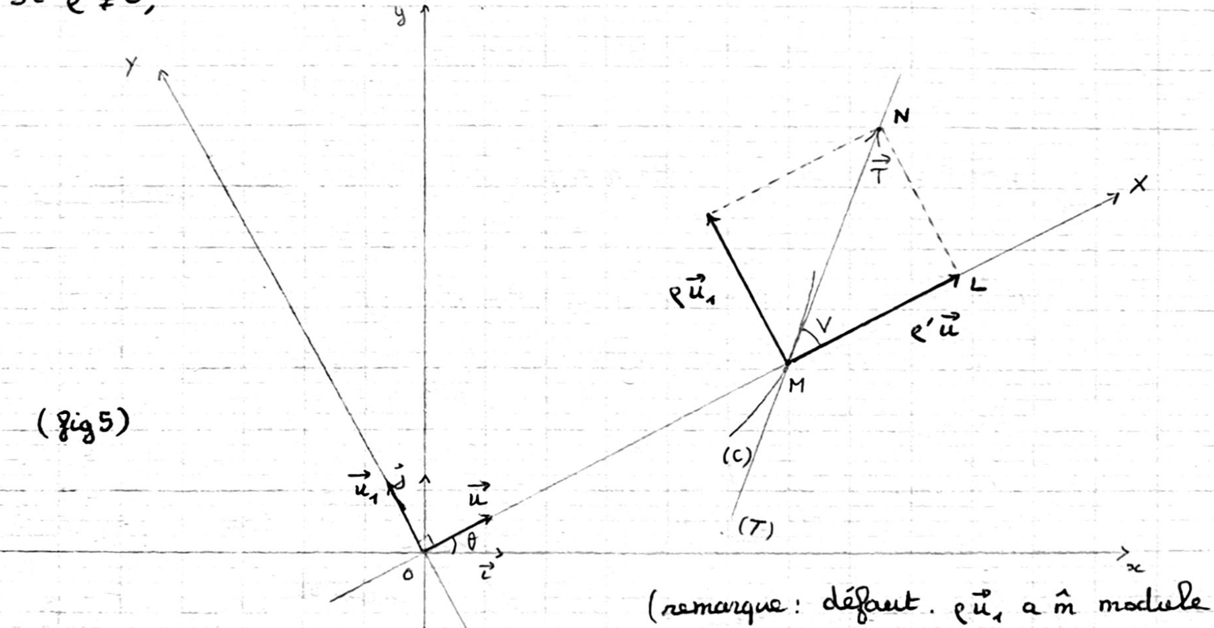
Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que angle $(\vec{Ox}, \vec{u}) \equiv \theta \ [2\pi]$.

On a : $\vec{OM} = \rho \vec{u}$.

Par suite $\dfrac{d\vec{OM}}{d\theta} = \dfrac{d\rho}{d\theta}\vec{u} + \rho\dfrac{d\vec{u}}{d\theta} = \rho'\vec{u} + \rho\vec{u}_1$

avec $\vec{u}_1$ = vect. unitaire directement orthogonal à $\vec{u}$.

Si $\rho' \neq 0$,



(remarque : défaut. $\rho\vec{u}_1$ a m̂ module que $\vec{OM} = \rho\vec{u}$)

$\operatorname{tg} V = \dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{NL}{ML}$ ($\operatorname{tg} V \geq 0$ car $\vec{u} \perp \vec{u}_1$, $0 \leq V \leq \frac{\pi}{2}$)

Si $\rho' = 0$, $\dfrac{d\vec{OM}}{d\theta} = \rho\vec{u}_1$. Alors $V = \frac{\pi}{2}$ (complément du cas ci-dessus).

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{r'_\theta}$$

par coeur

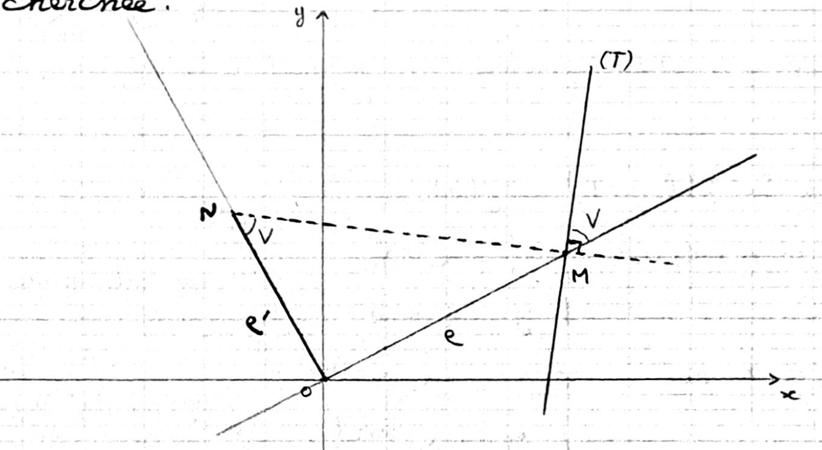
Tracé graphique

On trace la normale à (C) en M, normale qui coupe OY en N et forme avec OY un angle de mesure V (en valeur absolue). Donc $tg\,V = \frac{OM}{ON}$

Comme $tg\,V = \frac{\rho}{\rho'}$, et que $OM = \rho$, on voit que $ON = \rho'$.

Cette remarque va permettre le tracé graphique :

On portera ρ' sur OY, puis on joindra MN. La perpendiculaire à MN en M est la tgte cherchée.



Branches infinies.

1°/ $\rho \to \pm\infty$ quand $\theta \to \theta_0$

On emploiera alors la représentation paramétrique $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

2°/ $\rho \to \pm\infty$ quand $\theta \to \pm\infty$

On dit alors que la courbe admet une "branche spirale".

3°/ $\rho \to \rho_0$ quand $\theta \to \pm\infty$

On dit alors que la courbe admet un "cercle asymptote". Plus précisément, si $\rho \to a$, la courbe admet le "cercle asymptote" de centre O et de rayon a.

Si $a = 0$, O est le "point asymptote".

Intervalles d'étude et symétries.

$\rho = f(\theta)$.

* Si f est périodique de période $k2\pi$, on étudie f dans 1 intervalle large d'une période.

* si n impair et $\rho(\theta + n\pi) = \rho(\theta)$, alors on prendra un intervalle d'étude de longueur $n\pi$, et l'on completera la courbe par symétrie par rapport à O.

En effet : pour θ, $\rho(\theta) = \rho$, $\begin{cases} x_1 = \rho \cos\theta \\ y_1 = \rho \sin\theta \end{cases}$

Comme $\rho(\theta + n\pi) = \rho(\theta) = \rho$, $\begin{cases} x_2 = \rho \cos(\theta + n\pi) = -\rho\cos\theta = -x_1 \\ y_2 = \rho \sin(\theta + n\pi) = -\rho \sin\theta = -y_1 \end{cases}$

Il y a donc symétrie par rapport à l'origine.

* Si $\rho(\theta + n\pi) = -\rho(\theta)$,

si n impair $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ sur intervalle $[0, n\pi]$

si n pair $\begin{cases} x = -\rho\sin\theta \\ y = -\rho\sin\theta \end{cases}$ sym. par rapport à O.

(cf DS 43)

Points doubles

Pour voir si O est double, on cherche si l'équation $\rho(\theta) = 0$ a plus d'une racine dans l'intervalle d'étude.

Un autre pt que O est double soit si :

$$\rho(\theta + k2\pi) = \rho(\theta)$$

soit si $\rho(\theta + k2\pi) = -\rho(\theta)$.

En effet : $\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta = \rho(\theta')\cos\theta' & (1) \\ y = \rho(\theta)\sin\theta = \rho(\theta')\sin(\theta') & (2) \end{cases}$

donc $tg\,\theta = tg\,\theta' \mapsto \theta' \equiv \theta \;[2\pi]$ donc $\theta' = \theta + k2\pi$ ~~[2π]~~

ou $\theta' \equiv \theta + \pi \;[2\pi]$ donc $\theta' = \pi + \theta + k2\pi$ ~~mod(2π)~~

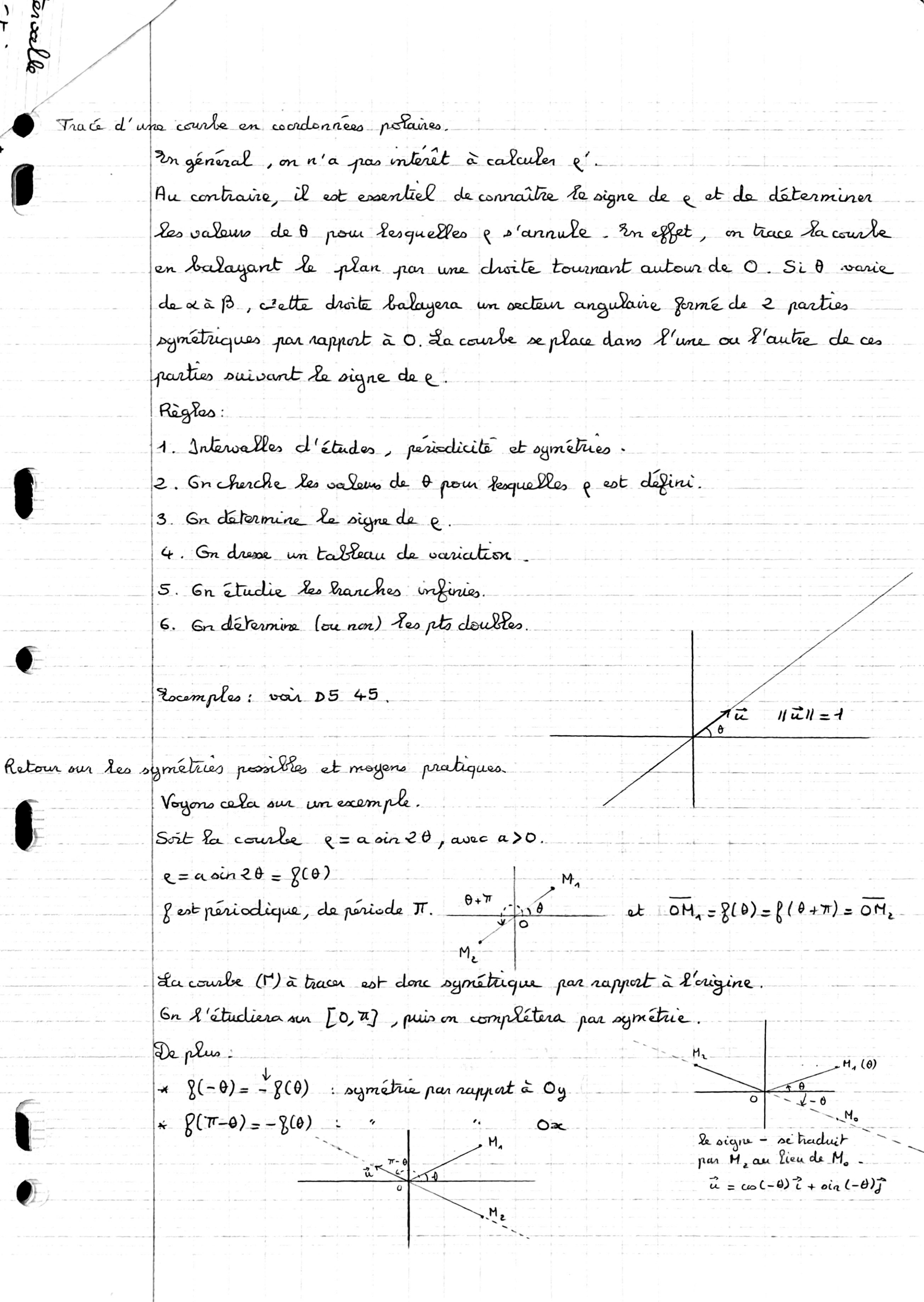
alors (1) $\rho(\theta)\cos\theta = \rho(\theta + k2\pi)\cos(\theta)$

~~(2)~~ $\rho(\theta + k2\pi) = \rho(\theta)$

ou : (1) $\rho(\theta)\cos\theta = \rho(\theta + (2k+1)\pi)\cos(\theta + \pi)$

$\rho(\theta + (2k+1)\pi) = -\rho(\theta)$

CQFD



Trace d'une courbe en coordonnées polaires.

En général, on n'a pas intérêt à calculer ρ'.

Au contraire, il est essentiel de connaître le signe de ρ et de déterminer les valeurs de θ pour lesquelles ρ s'annule. En effet, on trace la courbe en balayant le plan par une droite tournant autour de O. Si θ varie de α à β, cette droite balayera un secteur angulaire formé de 2 parties symétriques par rapport à O. La courbe se place dans l'une ou l'autre de ces parties suivant le signe de ρ.

Règles :

1. Intervalles d'études, périodicité et symétries.
2. On cherche les valeurs de θ pour lesquelles ρ est défini.
3. On détermine le signe de ρ.
4. On dresse un tableau de variation.
5. On étudie les branches infinies.
6. On détermine (ou non) les pts doubles.

Exemples : voir DS 45.

$\vec{u}$ θ $\|\vec{u}\| = 1$

Retour sur les symétries possibles et moyens pratiques.

Voyons cela sur un exemple.

Soit la courbe $\rho = a \sin 2\theta$, avec $a > 0$.

$\rho = a \sin 2\theta = f(\theta)$

f est périodique, de période π.

$\theta+\pi$ θ O M_1 M_2

et $\overline{OM_1} = f(\theta) = f(\theta+\pi) = \overline{OM_2}$

La courbe (Γ) à tracer est donc symétrique par rapport à l'origine.

On l'étudiera sur $[0, \pi]$, puis on complétera par symétrie.

De plus :

* $f(-\theta) = -f(\theta)$: symétrie par rapport à Oy
* $f(\pi-\theta) = -f(\theta)$: " " Ox

M_1 $\pi-\theta$ $\vec{u}$ θ 0 M_2

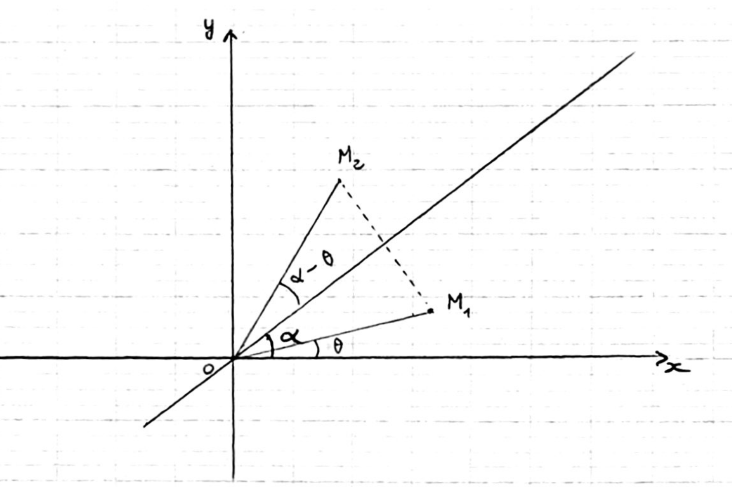
M_2 $M_1(\theta)$ O θ $-\theta$ M_0

le signe − se traduit par M_2 au lieu de M_0.

$\vec{u} = \cos(-\theta)\vec{i} + \sin(-\theta)\vec{j}$

Plus généralement, soit la droite passant par O et d'équation : $\theta = \alpha$.

Cette droite est axe de symétrie ssi : $\rho(\theta) = \rho(2\alpha - \theta)$.



Ici $\rho\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = a \sin(\pi - 2\theta) = a \sin 2\theta = \rho(\theta)$

La courbe est donc symétrique par rapport à la première bissectrice.

En conclusion :

sym. 1re bissectrice

sym. axe Oy

connu

$\frac{\pi}{4}$

O

sym. axe Ox

sym. axes Ox ou Oy

on étudie sur $[0, \pi]$

on étudie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Donc, sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$\rho = a \sin 2\theta$ $\qquad$ θ : $0 \nearrow \frac{\pi}{4}$

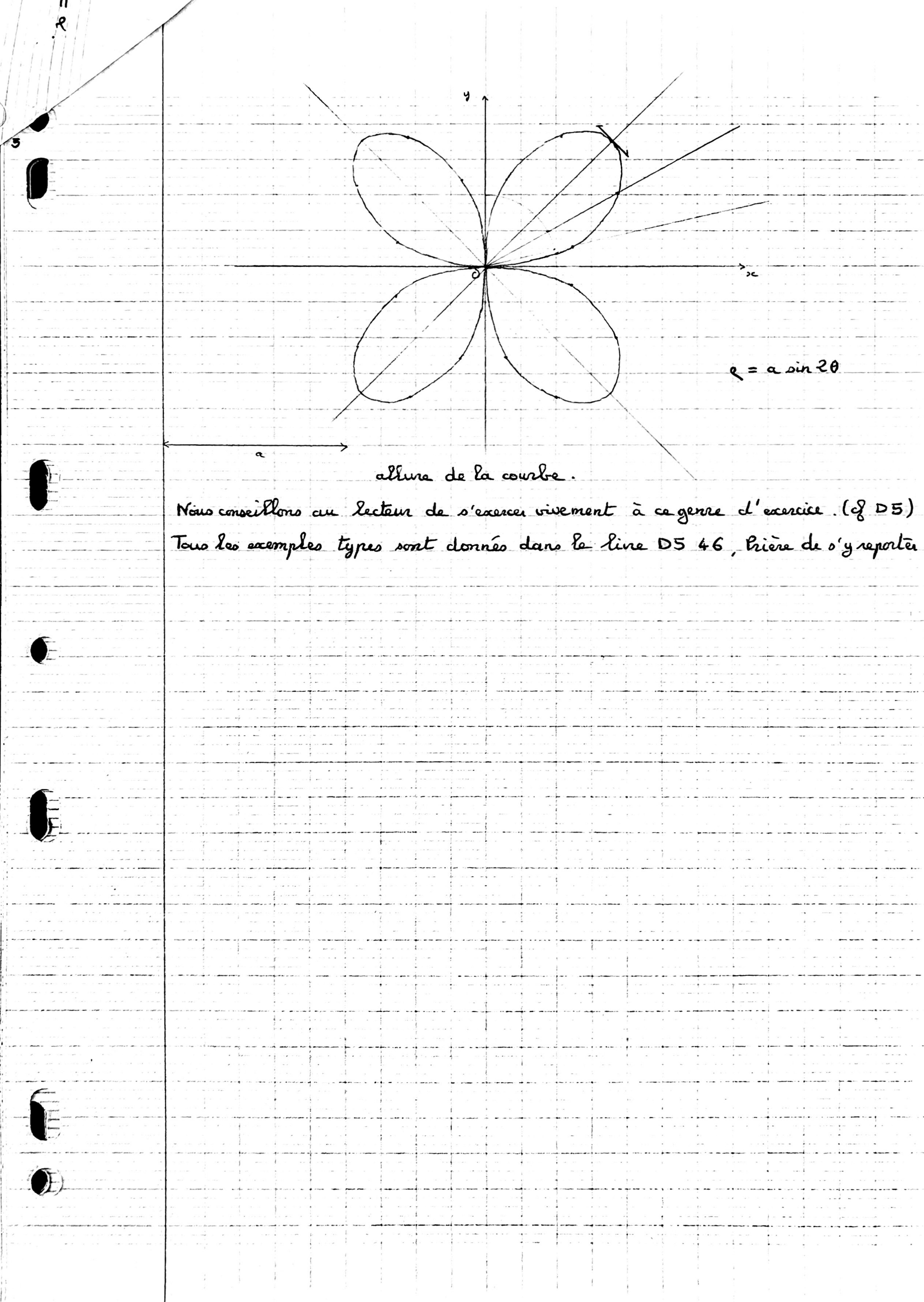
$\qquad\qquad\qquad\qquad$ ρ : $0 \nearrow a$

sans qu'il soit nécessaire de calculer ρ'.

Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\rho' = 2a \cos 2\theta$ est nul. La tangente est alors perpendiculaire à $\vec{OM}$ (voir $(\vec{OM})' = \rho' \vec{u} + \rho \frac{d\vec{u}}{dt}$). La courbe a la forme d'une rosace à 4 branches (cf figure)

$\theta = \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $\rho = a \sin \frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} =$

$\theta = \frac{\pi}{12}$ $\qquad$ $\rho = \frac{a}{2}$



allure de la courbe.

Nous conseillons au lecteur de s'exercer vivement à ce genre d'exercice. (cf D5)
Tous les exemples types sont donnés dans le livre D5 46, Prière de s'y reporter

Exemples de courbes en coord. polaires

La cardioïde et la cissoïde.

1°/ La cardioïde

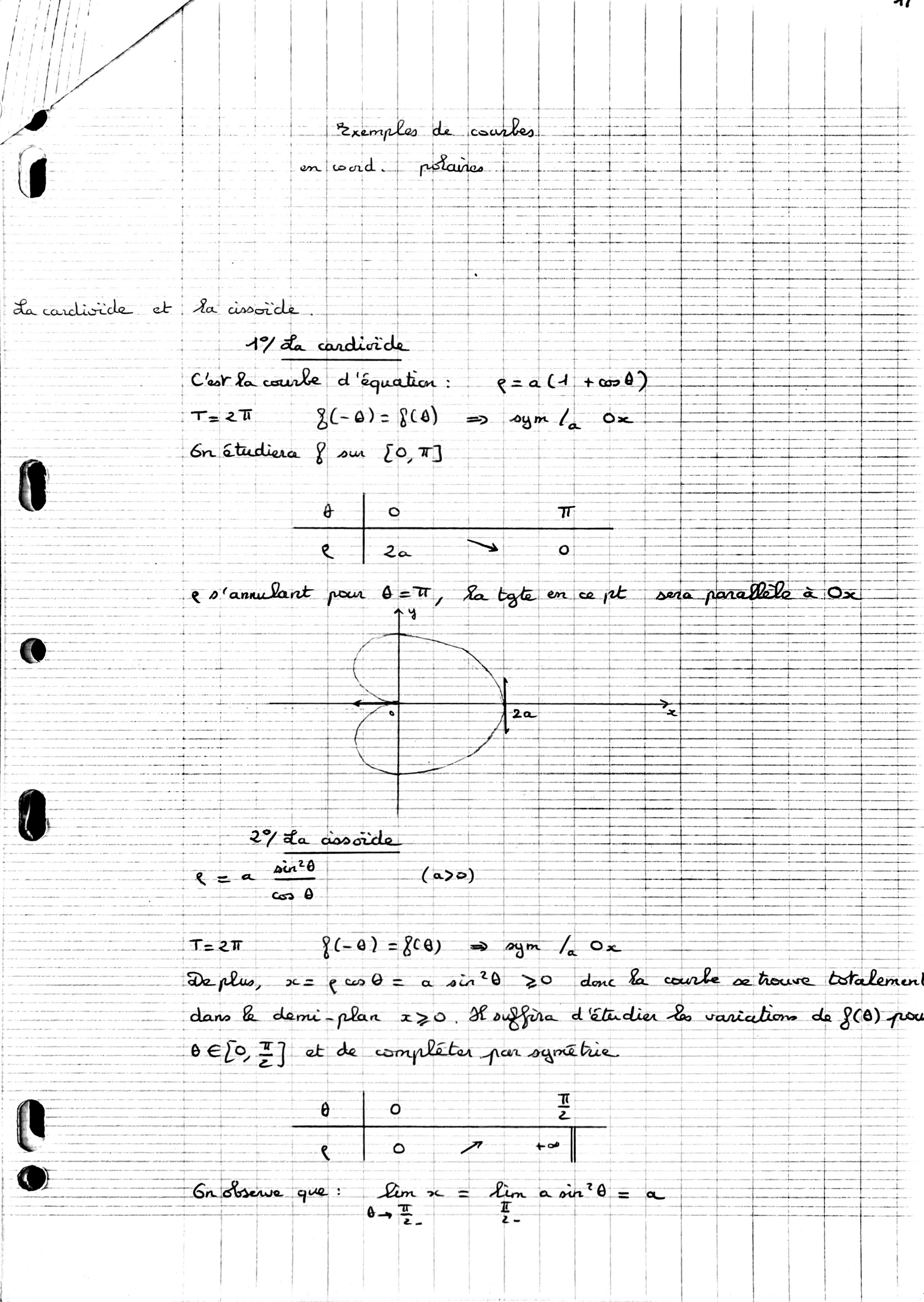
C'est la courbe d'équation : $\rho = a(1 + \cos\theta)$

$T = 2\pi$ $\rho(-\theta) = \rho(\theta) \Rightarrow$ sym $/_a$ Ox

On étudiera ρ sur $[0, \pi]$

θ	0		π
ρ	$2a$	$\searrow$	0

ρ s'annulant pour $\theta = \pi$, la tgte en ce pt sera parallèle à Ox



2°/ La cissoïde

$$\rho = a\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \qquad (a>0)$$

$T = 2\pi$ $\rho(-\theta) = \rho(\theta) \Rightarrow$ sym $/_a$ Ox

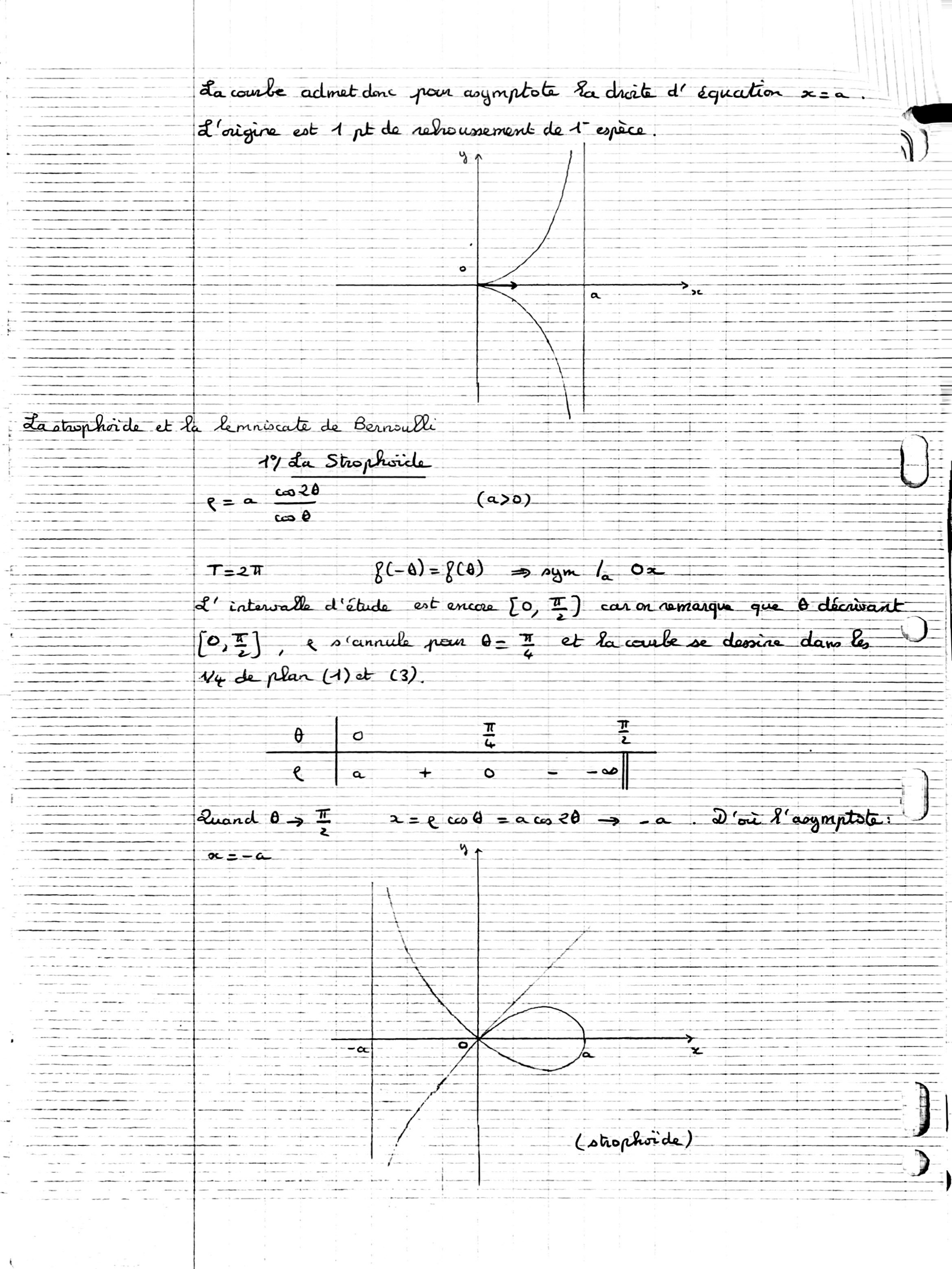
De plus, $x = \rho\cos\theta = a\sin^2\theta \geq 0$ donc la courbe se trouve totalement dans le demi-plan $x \geq 0$. Il suffira d'étudier les variations de $\rho(\theta)$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et de compléter par symétrie

θ	0		$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

On observe que : $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} x = \lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} a\sin^2\theta = a$

La courbe admet donc pour asymptote la droite d'équation $x = a$.

L'origine est 1 pt de rebroussement de 1re espèce.



La strophoïde et la lemniscate de Bernoulli

1°/ La Strophoïde

$$\rho = a \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} \qquad (a > 0)$$

$T = 2\pi$ $\qquad \rho(-\theta) = \rho(\theta) \Rightarrow$ sym $/_a$ Ox

L'intervalle d'étude est encore $[0, \frac{\pi}{2})$ car on remarque que θ décrivant $[0, \frac{\pi}{2})$, ρ s'annule pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ et la courbe se dessine dans les 1/4 de plan (1) et (3).

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ	a	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖

Quand $\theta \to \frac{\pi}{2}$ $\qquad x = \rho \cos\theta = a \cos 2\theta \to -a$. D'où l'asymptote : $x = -a$

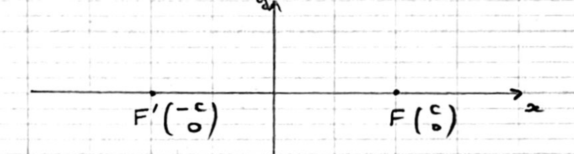
(strophoïde)

$x = a$.

2°/ Lemniscate de Bernoulli

C'est l'ensemble des pts dont le produit des distances à 2 pts donnés F et F' est égal au carré de la demi-distance $\frac{FF'}{2}$.

Prenons le repère suivant précisé sur la figure :



L'équation de la lemniscate sera donc :

$$MF \times MF' = c^2$$

$$[(x-c)^2+y^2][(x+c)^2+y^2] = c^4$$

en coordonnées polaires :

$$[(\rho\cos\theta - c)^2 + \rho^2\sin^2\theta][(\rho\cos\theta + c)^2 + \rho^2\sin^2\theta] = c^4$$

$$(\rho^2+c^2-2\rho c\cos\theta)(\rho^2+c^2+2\rho c\cos\theta) = c^4$$

$$(\rho^2+c^2)^2 - 4c^2\rho^2\cos^2\theta = c^4$$

$$\rho^4 = 2c^2\rho^2\cos 2\theta$$

$\rho = 0 \Rightarrow O \in$ (courbe)

Si $\rho \neq 0$ $\quad \rho^2 = 2c^2\cos 2\theta$

Posons $a = c\sqrt{2}$, alors tte la courbe, et m̂ le pt O, sera obtenue en prenant : $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$

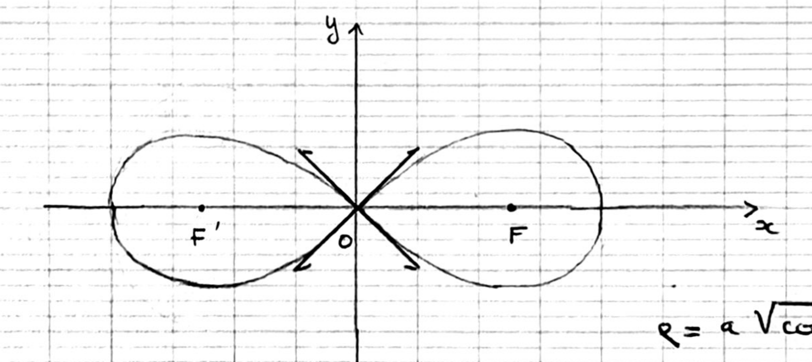
Etude de $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$.

$T = \pi$ et l'on doit avoir $\cos 2\theta \geq 0 \Leftrightarrow$ sur $[0, \pi]$: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
ρ	a	↘	0

Les axes de coordonnées sont axes de symétrie car $f(-\theta) = f(\theta)$ et $f(\pi - \theta) = f(\theta)$

La courbe a la forme d'un huit, les tgtes à l'origine sont orthogonales :



Les spirales

On appelle ainsi les courbes admettant une branche spirale ou un point asymptote. Il y a 3 spirales classiques :

1°/ Spirale d'Archimède : $\rho = a\theta$

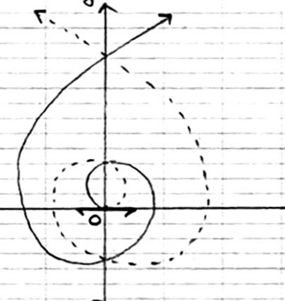
$f(-\theta) = -f(\theta) \Rightarrow$ courbe sym /à Oy

Elle n'est pas périodique. On l'étudiera sur $[0, +\infty[$

θ	0		$+\infty$
ρ	0	↗	$+\infty$

(a>0)

La courbe est tgte en O à Ox (puisque $\rho = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$)



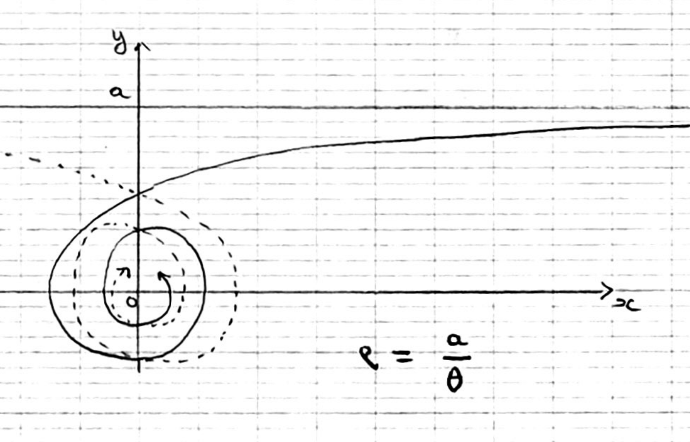
$\rho = a\theta$

2°/ Spirale hyperbolique $\rho = \frac{a}{\theta}$

La courbe est encore symétrique par rapport à Oy.

θ	0		$+\infty$
ρ	$+\infty$	↘	0

L'origine est point asymptote. Quand $\theta \to 0$ $y \to a$; la courbe admet donc une asymptote horizontale.



$\rho = \frac{a}{\theta}$

3/ Spirale logarithmique : $\rho = a e^{m\theta}$ $(a, m > 0)$

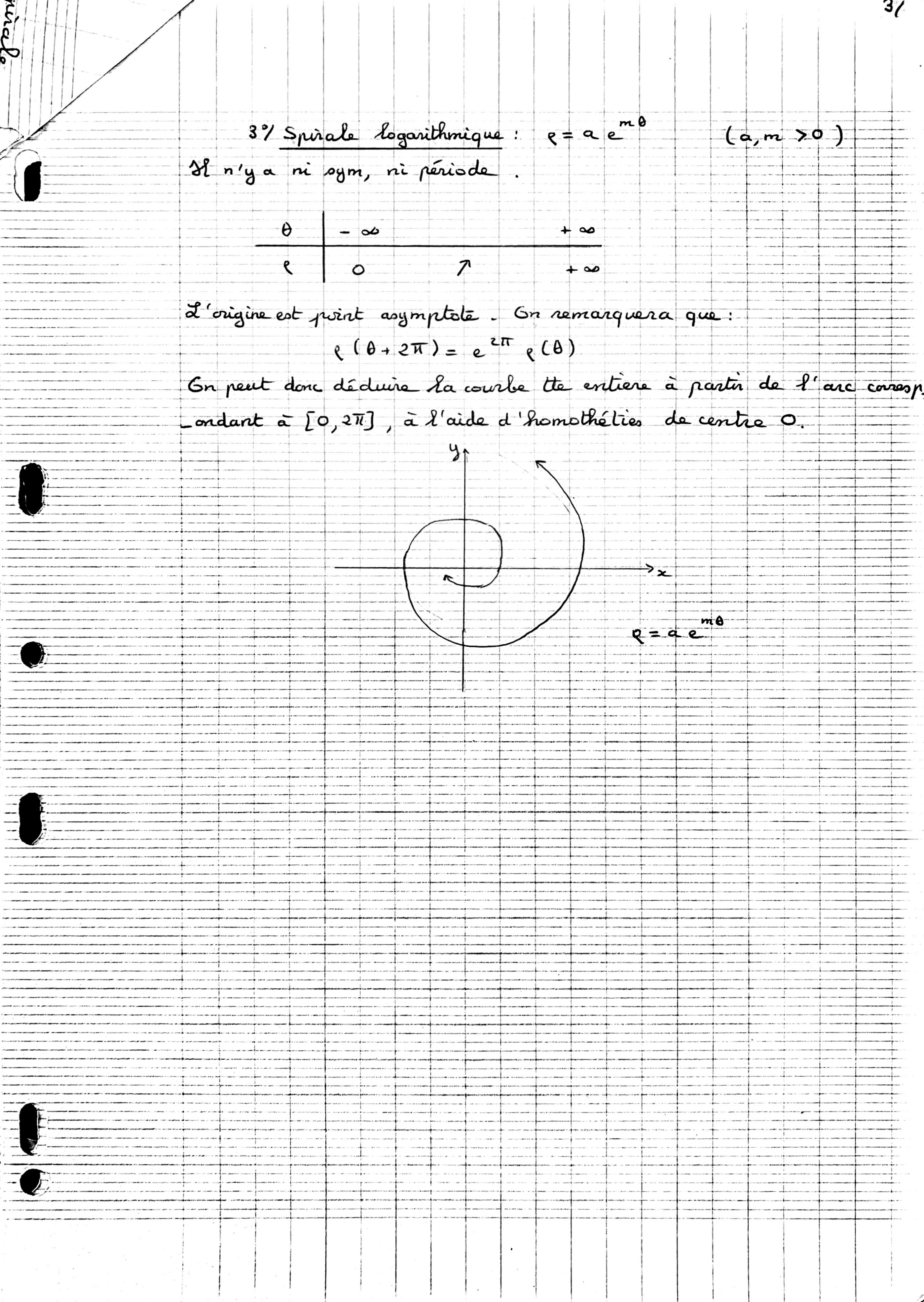
Il n'y a ni sym, ni période.

θ	$-\infty$		$+\infty$
ρ	0	$\nearrow$	$+\infty$

L'origine est point asymptote. On remarquera que :

$$\rho(\theta + 2\pi) = e^{2\pi} \rho(\theta)$$

On peut donc déduire la courbe tte entière à partir de l'arc correspondant à $[0, 2\pi]$, à l'aide d'homothéties de centre O.



Étude métrique des courbes

Longueur d'un arc de courbe

Soit (I, f) un arc paramétré où $I = [a, b]$ et où f est une fct vectorielle : $f : \mathbb{R} \rightarrow \vec{E}$

$$t \mapsto f(t) = \vec{OM}$$

Soit $S = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de I telle que :

$$t_0 = a \leq t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

La ligne polygonale de sommets $M_0 = A = f(a)$, $M_1 = f(t_1)$, ..., $M_n = f(b) = B$ est appelée "ligne polygonale inscrite dans l'arc paramétré" associée à la subdivision S.

y, A, M_1, M_2, M_3, M_4, B, x

Si l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans cet arc admet une borne supérieure l, alors on dira que l est la longueur de l'arc paramétré. On démontre que l est aussi la limite quand $n \to +\infty$ des lignes polygonales inscrites.

Si f est continûment dérivable, l'arc est rectifiable et :

$$l = \lim_{n \to +\infty} S \quad \text{où} \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} \| f(t_{i+1}) - f(t_i) \| = \sum_{0}^{n-1} \left\| \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\| (t_{i+1} - t_i)$$

Donc

$$\boxed{l = \int_a^b \| f'(t) \| \, dt}$$

Si y = fonction de x, $f'(t) \, (1, y')$ (ici $t = x$)

Ainsi

$$l = \int_{a=x}^{b} \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

Plus généralement, soit $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

Le vecteur $\vec{f}'(t)$ a pour composantes $(f'(t), g'(t))$. Alors :

$$\ell = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt$$

D'autre part, en coordonnées polaires, $\vec{OM} = \rho \vec{u}$ donc :

$$\frac{d\vec{OM}}{d\theta} = \rho' \vec{u} + \rho \vec{u}_1 \quad \text{où} \quad \vec{u}_1 = \frac{d\vec{u}}{d\theta}$$

par suite :

$$\ell = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta$$

Exemples de calcul

1°/ Arc de parabole

$y = \frac{x^2}{8}$. Calculer la longueur de l'arc correspondant à $[0, 4]$

$$\ell = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{x^2}{16}}\, dx$$

Posons $x = 4\,\text{sh}\,t$ alors $\ell = \int_0^{\text{Arg sh} 1} \text{ch}\,t \; 4\,\text{ch}\,t\, dt$

$$\ell = 4\int_0^{\text{Arg sh} 1} \text{ch}^2 t\, dt = 2\int (1 + \text{ch}\,2t)\, dt = 2t + \text{sh}\,2t$$

Finalement : $\ell = 2\,\text{Arg sh}\,1 + 2\sqrt{2}$

$$\ell = 2\left[\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\right]$$

2°/ Cercle

$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ $\begin{cases} x' = -R\sin t \\ y' = R\cos t \end{cases}$ $R > 0$

pour $t \in [0, 2\pi]$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt = \left[Rt\right]_0^{2\pi} = 2\pi R$$

3°/ Cardioïde

$\rho = a(1+\cos\theta)$

$\rho' = -a\sin\theta = \dfrac{d\rho}{d\theta}$

On fait varier θ de $-\pi$ à π :

$$\ell = a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\;d\theta$$

$$= a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\;d\theta$$

$$= a\int_{-\pi}^{\pi} 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$ sur $[-\pi,\pi]$ $\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \cos\frac{\theta}{2}$

Donc $\ell = 2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a$

Etude de la chainette

Aire limitée par le support d'un arc paramétré.

Rappel de la formule de Stokes :
(admise)

$$\oint_{(C)} \vec{F}.\vec{dl} = \iint_{(S)} \vec{rot}\vec{F}.\vec{dS} \qquad (1)$$

Cherchons une forme autre de (1).

$$\oint_{(C)} \vec{F}.\vec{dl} = \int_{(C)} P\,dx + Q\,dy$$

si $\vec{F}(P, Q)$ dans le plan (O, x, y)

$\vec{dS} = (0, 0, dx\,dy)$

et

$$\vec{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sim \\ \sim \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{rot}\vec{F}.\vec{dS} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Ainsi, on obtient la formule de Green - Riemann :

$$\int_{(C)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (2)$$

Ccl : si l'origine et l'extrémité de l'arc sont confondues, on trouve :

$$\boxed{S = -\int y\,dx = \int x\,dy = \frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx} \qquad (3)$$

en prenant des valeurs P et Q particulières dans (2)
(par ex : $P = -y$ et $Q = 0$)

(*) : cf D5 111

Etudier et représenter la courbe :

$$\rho = 2\cos\theta - \cos 2\theta$$

Montrer que les tangentes aux points doubles distincts de l'origine sont perpendiculaires.

M(θ)
θ
M(−θ)

* $\theta \in [-\pi, \pi]$
$\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ donc on se restreint à $[0, \pi]$ puis on complète par symétrie / à Ox.

* $\rho' = -2\sin\theta + 2\sin 2\theta = -2\sin\theta + 4\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta(2\cos\theta - 1)$

$\rho' = 0 \iff \begin{cases} \sin\theta = 0 \iff \theta = k\pi \text{ , ici } \theta = 0 \text{ ou } \pi \\ \text{ou} \\ \cos\theta = \frac{1}{2} \iff \theta = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ , ici } \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

θ	0		$\pi/3$		π
ρ'	0	$+$	0	$-$	0
ρ	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3

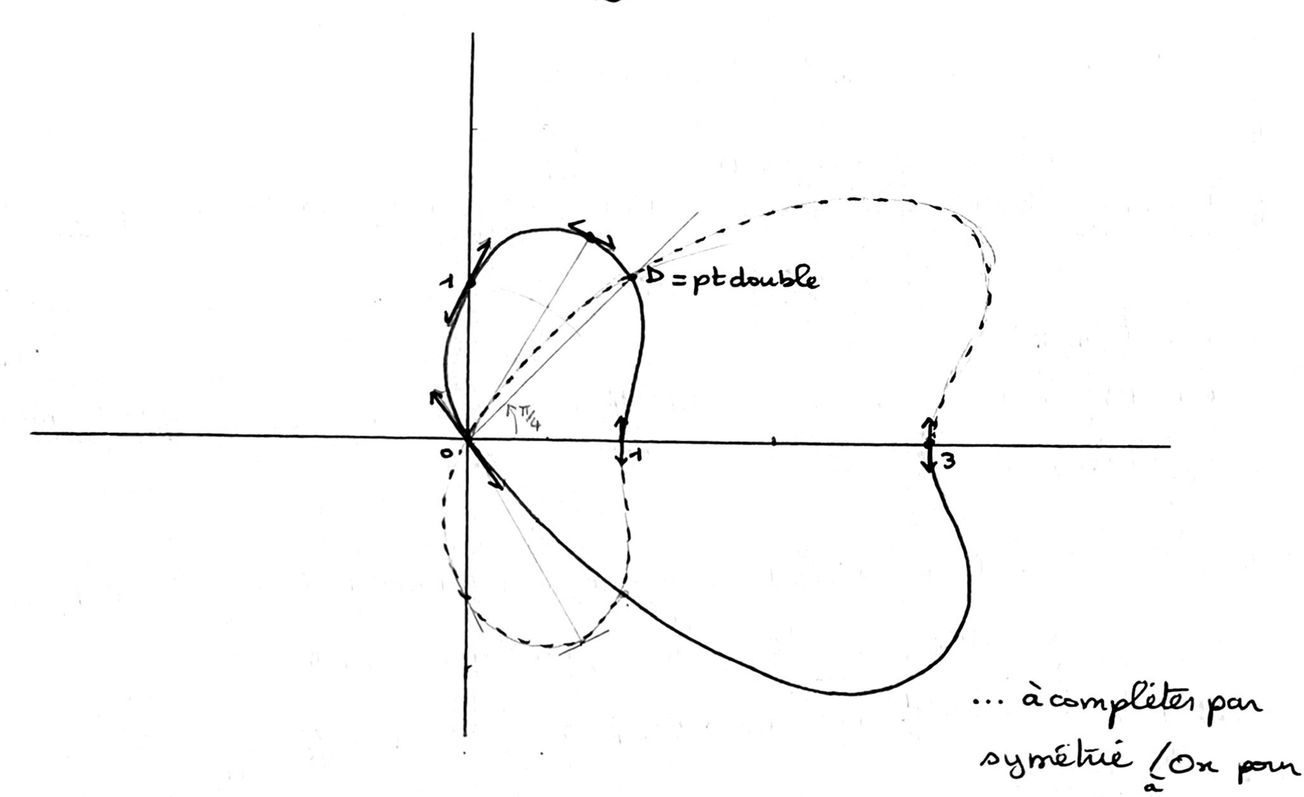
* $M(\frac{\pi}{2})$ est sur l'axe Oy : $\rho(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\rho'(\frac{\pi}{2}) = -2$ donc $\tan V = \frac{1}{-2}$.
La tgte en $M(\frac{\pi}{2})$ est de pente $-\frac{1}{2}$ dans le repère $(M(\frac{\pi}{2}), \vec{u}_{\frac{\pi}{2}}, \vec{v}_{\frac{\pi}{2}})$

* $\rho(\theta) = 0 \iff 2\cos\theta - \underbrace{\cos 2\theta}_{2\cos^2\theta - 1} = 0 \iff 2\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$

d'où $\cos\theta = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$
On trouve $\theta = \theta_0$ où $\theta_0 \simeq 111°$.
La tangente en $M(\theta_0) = O$ est dirigée par $\vec{u}_{\theta_0}$.

* Tgte en $\theta = 0$: $\tan V = \frac{\rho(0)}{\rho'(0)} = \infty$ donc $V = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et la tgte en $M(0)$ est verticale.

* Tgte en $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou π. On a encore $\tan V = \infty$ donc $V = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, et la tangente à $M(\frac{\pi}{3})$ (resp. $M(\pi)$) est perpendiculaire à $(OM(\frac{\pi}{3}))$ (resp. $(OM(\pi))$).



* Etude au voisinage de M(0) :

$x(\theta) = \rho \cos\theta = (2\cos\theta - \cos 2\theta).\cos\theta = 2\cos^2\theta - 2\cos^3\theta + \cos\theta$

Comme
$$\begin{cases} \cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2} + o(\theta^2) \\ \cos^2\theta = 1 - \theta^2 + o(\theta^2) \\ \cos^3\theta = 1 + 3\left(-\dfrac{\theta^2}{2}\right) + o(\theta^2) = 1 - \dfrac{3}{2}\theta^2 + o(\theta^2) \end{cases}$$

on trouve :

$$x(\theta) = 1 + \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)$$

Donc $x(\theta) > 1$ pour θ voisin de 0, et l'allure de la courbe en ce point.

* Recherche des points doubles (autres que l'origine)

$M(\theta)$ décrit toute la courbe quand θ varie de 0 à 2π.

$$M(\theta_1) = M(\theta_2) \iff \rho(\theta_1)\vec{u}_{\theta_1} = \rho(\theta_2)\vec{u}_{\theta_2}$$

$$\iff \begin{cases} \rho(\theta_1) = \rho(\theta_2) \text{ et } \theta_2 = \theta_1 \\ \text{ou} \\ \rho(\theta_1) = -\rho(\theta_2) \text{ et } \theta_2 = \theta_1 + \pi \end{cases}$$

On désire ici $\theta_1 \neq \theta_2$, de sorte que :

M(θ_1) est pt double $\iff \exists\, \theta_2 = \theta_1 + \pi \quad \rho(\theta_1) = -\rho(\theta_2)$

$\iff 2\cos\theta_1 - \cos 2\theta_1 = -\left[2\cos(\pi+\theta_1) - \cos 2(\pi+\theta_1)\right]$

$\iff \cos 2\theta_1 = 0$

$\iff 2\theta_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\iff \theta_1 = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$.

On calcule :

$\begin{cases} \rho\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \\ \rho\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \end{cases}$ d'où le point double D de coord. polaires $(\rho,\theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

" D' " $(\rho,\theta) = \left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

* Tangentes au point double D :

$\tan V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$

$\tan V\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{-1}{\sqrt{2}+1}$

Ces 2 calculs nous donnent les pentes des 2 tangentes à D, mais dans des repères différents. Ainsi :

$1+\sqrt{2}$ est la pente de la 1- tangente dans le repère $(D, \vec{u}_{\frac{\pi}{4}}, \vec{v}_{\frac{\pi}{4}})$

$\frac{-1}{1+\sqrt{2}}$ " 2- " " $(D, \vec{u}_{\frac{\pi}{4}+\pi}, \vec{v}_{\frac{\pi}{4}+\pi})$ $= (D, -\vec{u}_{\frac{\pi}{4}}, -\vec{v}_{\frac{\pi}{4}})$

Les vecteurs de base étant opposés, $-\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ sera aussi la pente de la 2- tangente dans le 1- repère $(D, \vec{u}_{\frac{\pi}{4}}, \vec{v}_{\frac{\pi}{4}})$. De sorte que $(1+\sqrt{2}) \cdot \frac{-1}{1+\sqrt{2}} = -1$ indique que ces 2 tangentes sont orthogonales.

Etude et représentation graphique de la courbe :

$$\rho = \frac{\sin\theta \cdot (\sin\theta + 1)}{\cos\theta}$$

* $\theta \in [\alpha, \alpha + 2\pi]$, α à déterminer judicieusement.

$\rho(\pi-\theta) = -\rho(\theta)$ d'où le dessin :

$\pi - \theta$ et θ sont symétriques / à $\frac{\pi}{2}$:

donc on choisit l'intervalle d'étude $\left[\frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}+\pi\right] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

<u>On se restreint à</u> $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ <u>puis on complète par symétrie / à Ox</u>.

* ρ n'est pas définie pour $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, et ici $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\rho' = \frac{-\sin^3\theta + 2\sin\theta + 1}{\cos^2\theta}$$

$\rho' = 0 \iff \sin^3\theta - 2\sin\theta - 1 = 0$

$\iff X^3 - 2X - 1 = 0 \iff (X+1)(X^2 - X - 1) = 0$

$\iff X = -1$ ou $X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Comme $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, on aura :

$\rho' = 0 \iff \sin\theta = -1$ ou $\sin\theta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\iff \theta = -\frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \theta_0$ (avec $\theta_0 \simeq -38°$)

*

θ	$-\frac{\pi}{2}$		θ_0		0		$\frac{\pi}{2}$
ρ'	‖	$-$	0	$+$	1	$+$	‖
ρ	‖ 0_-	$\searrow$	$\rho(\theta_0)$ (≃ $-0{,}3$)	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

* $\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}^+} \rho(\theta) = 0$ car $\rho \underset{-\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}$, et la règle de l'Hôpital

donne $\lim_{-\frac{\pi}{2}} -\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} = \lim_{-\frac{\pi}{2}} -\frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = 0$

* $\rho(0) = 0$ donc la courbe admet une tangente horizontale à l'origine (en effet : $\vec{OM}'(\theta) = \rho' \vec{u}_\theta + \rho \vec{v}_\theta \Rightarrow \vec{OM}'(0) = \rho'(0)\vec{u}_0$ où $\rho'(0) = 1$)

(réf. Deug A 1ère année 92-93)

* Etude en $M(-\frac{\pi}{2})$: $M(-\frac{\pi}{2})$ est le pt obtenu pour θ tendant vers $-\frac{\pi}{2}$.
C'est l'origine O. La tgte en tout point $M(\theta)$ avec θ proche de $-\frac{\pi}{2}$ est dirigée par $\vec{OM}(\theta) = \rho'(\theta)\,\vec{u}_\theta + \rho(\theta)\,\vec{v}_\theta$, d'où

$$\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}} \vec{OM}(\theta) = -\frac{1}{2}\,\vec{u}_{-\frac{\pi}{2}} + 0 \,.\, \vec{v}_{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\,\vec{i}$$

puisque $\lim_{\theta \to -\pi/2} \rho'(\theta) = \lim \frac{-\sin^3\theta - 2\sin\theta - 1}{\cos^2\theta} = \lim \frac{-3\sin^2\theta\cos\theta + 2\cos\theta}{2\cos\theta(-\sin\theta)} = -\frac{1}{2}$ (Règle de l'Hôpital)

2 solution :

Cherchons donc la limite de la pente de la sécante $(OM(\theta))$ quand $\theta \to -\frac{\pi}{2}$:

La pente de la sécante $(OM(\theta))$ est $\frac{y(\theta)}{x(\theta)}$

où $\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$

soit $\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}} \frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}} \tan\theta = -\infty$

M(θ)
O

La tangente sera donc verticale en $M(-\frac{\pi}{2})$

3 solution :

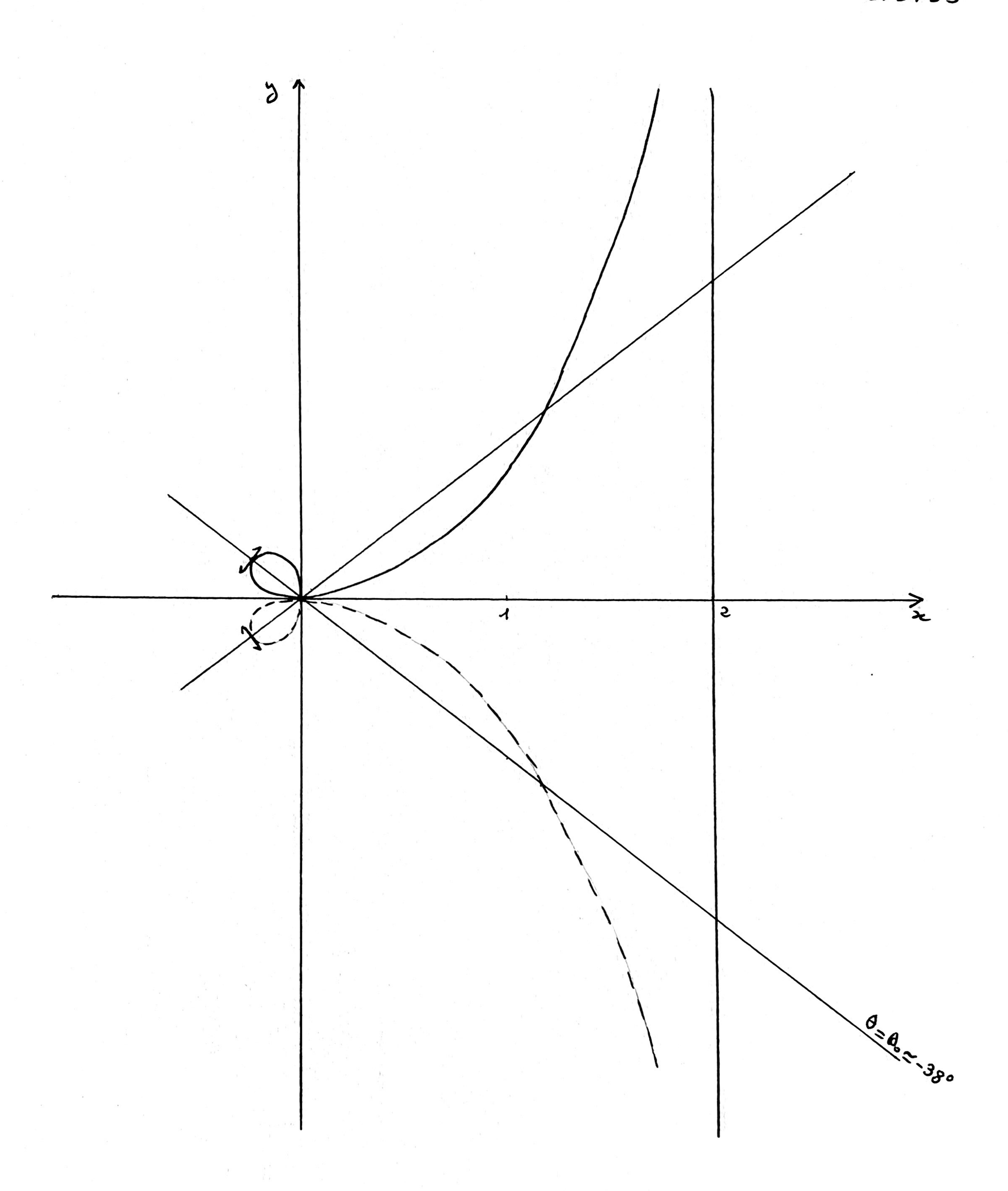
$\frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \frac{\sin\theta \,.\, \cos\theta}{-\sin^2\theta + \sin\theta + 1}$ donc $\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}} \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = 0$ et la tgte en $M(-\frac{\pi}{2})$ sera bien verticale.

* Branche infinie pour $\theta \to \frac{\pi}{2}$

Dans le repère $R_{\frac{\pi}{2}} = (O, \vec{u}_{\frac{\pi}{2}}, \vec{v}_{\frac{\pi}{2}})$, les coordonnées de $M(\theta)$ sont

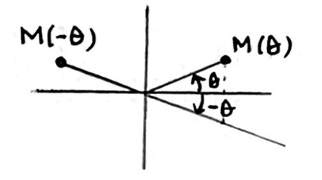
$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \longrightarrow +\infty \quad (\theta \to \frac{\pi}{2}) \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin\theta(\sin\theta + 1)}{\cos\theta}(-\cos\theta) = -\sin\theta(\sin\theta + 1) \end{cases}$$

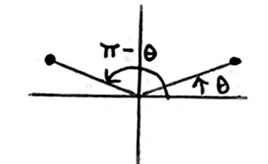
$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} y(\theta) = -2$ donc la droite d'équation $y = -2$ dans le repère $R_{\frac{\pi}{2}}$ est asymptote à la courbe quand $\theta \to \frac{\pi}{2}$.



$$\rho = \frac{\sin\theta . (\sin\theta + 1)}{\cos\theta}$$

> Etudier et donner l'allure de la courbe d'équation polaire
> $$\rho = -\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$$





* Intervalle d'étude :

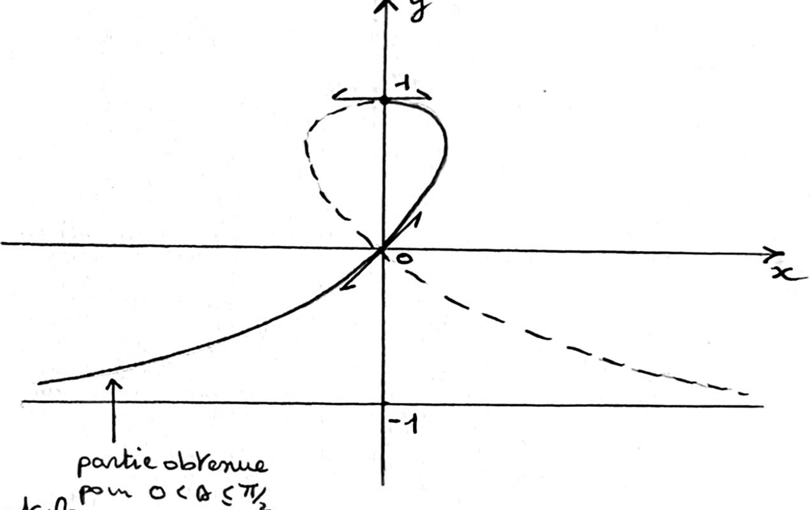
Etude sur $[-\pi,\pi]\setminus\pi\mathbb{Z}$

$\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ donc étude sur $]0,\pi[$ et symétrie /à Oy.

$\rho(\pi-\theta) = \rho(\theta)$ donc étude sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ puis symétrie /à Oy.

* $\rho' = \dfrac{\cos\theta.(3\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{\sin^2\theta}$ s'annule ssi $\cos\theta = 0$, ie $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

θ	0		$\pi/2$
ρ'	‖	$+$	0
ρ	‖ $-\infty$	↗	1



* Tgte en $M(\frac{\pi}{2})$:

$\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

donc $V = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

La tgte en $M(\frac{\pi}{2})\binom{0}{1}$ est donc horizontale.

* $\rho(\theta) = 0 \iff \cos 2\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, ici $\theta = \frac{\pi}{4}$

* Tgte en $\theta = \frac{\pi}{4}$: elle sera dirigée par $\vec{u}_{\frac{\pi}{4}}$, car $\rho(\frac{\pi}{4}) = 0$ entraine
$\overrightarrow{OM}'(\theta) = \rho'\vec{u}_\theta + \rho\,\vec{v}_\theta$ vaut $\rho'(\frac{\pi}{4})\vec{u}_{\frac{\pi}{4}}$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$.

* Etude de la branche infinie pour $\theta \to 0_+$: On se place dans le repère $R_0 = (0, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$.

$M(\theta)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta)\end{pmatrix}$ dans R_0, où $\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta \to -\infty \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = -\cos 2\theta \to -1 \end{cases}$ pour $\theta \to 0_+$.

La droite $y = -1$ dans le repère R_0 sera asymptote à la courbe.

(réf. Deug 1re année 92-93)

Etudier et représenter graphiquement la courbe dont une équation polaire est $\rho(\theta) = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$

On montrera, en particulier, l'existence d'une symétrie par rapport à la droite $\theta = \frac{\pi}{4}$ et on précisera la tangente aux points de paramètre $\theta = \frac{\pi}{4}$; $\theta = \frac{\pi}{2}$

---

* $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ donc θ doit être différent de $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ pour que $\rho(\theta)$ soit défini.

* $\rho(\pi + \theta) = -\rho(\theta)$ (1)

$\pi+\theta$; $M(\theta) = M(\pi+\theta)$; θ

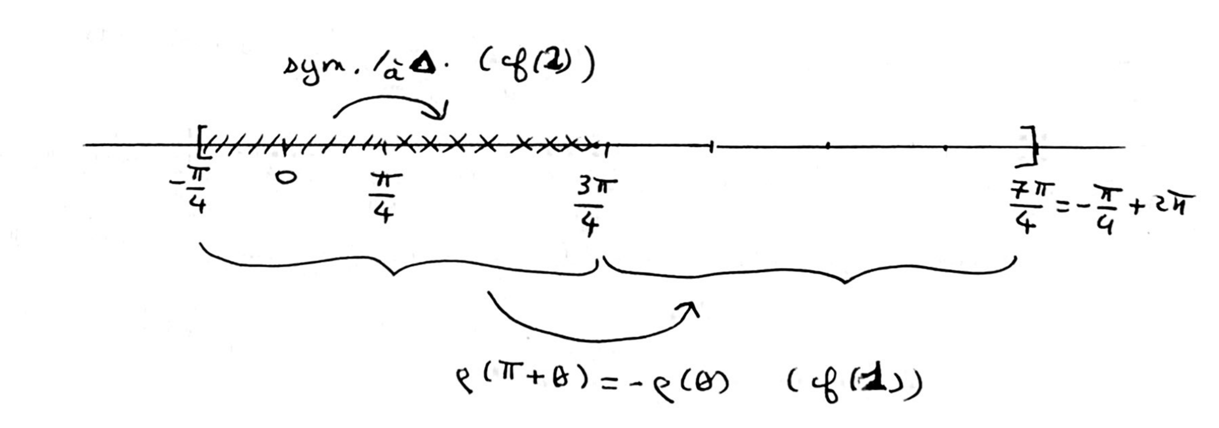
* Symétrie /à dte (Δ) d'équation $\theta = \frac{\pi}{4}$: → **2e méthode : Plus simple !** $\rho\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho(\theta)$

On vérifie que $\rho\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \rho\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$, soit :

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)}{\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{\cos 2\theta}{\sqrt{2}\cos\theta} \\ \rho\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \dfrac{\cos 2\theta}{\sqrt{2}\cos\theta} \end{cases}$$

d'où la symétrie (2)

* On prendra l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} + 2\pi\right] = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \doteq J$ de longueur 2π. On étudiera $\rho(\theta)$ pour θ variant dans $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ puis on complètera par symétrie /à (Δ), compte tenu du schéma :



(réf. Deug A₁-1e année, Analyse, UAG Septembre 93) (Deug 1e année 93-94)

* On trouve $\rho'(\theta) = \dfrac{2(\cos^3\theta - \sin^3\theta)}{(\sin\theta + \cos\theta)^2} \geq 0$ pour tout θ

(car $\cos^3\theta \geq \sin^3\theta \Leftrightarrow \cos\theta \geq \sin\theta \Leftrightarrow \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \geq 0$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{2} + k2\pi + \pi$. Ou bien voir le cercle trigo. !)
avec $\cos\theta \geq \sin\theta \Leftrightarrow 1 \geq \tan\theta$ et [schéma] tan

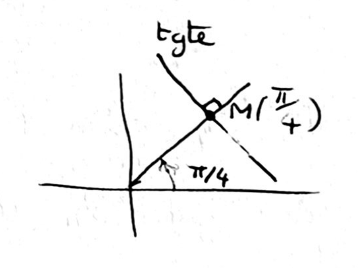
θ	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\pi/4$
ρ'	‖	$+$	2	$+$	0
ρ	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,7$

* $\rho(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin 2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\frac{\pi}{2}$, ici $\theta = 0$.

Comme $\rho'(0) = 2 \neq 0$, $M(0)$ ne sera pas stationnaire. Il n'y aura <u>aucun pt stationnaire</u> (Les seuls pts susceptibles d'être stationnaires sur une courbe en polaire étant l'origine obtenue pour θ tq $\rho(\theta) = 0$. En effet, si $\vec{OM}(\theta) = \rho\,\vec{u}_\theta$, alors $\vec{OM}'(\theta) = \rho'\vec{u}_\theta + \rho\,\vec{v}_\theta = \vec{0}$ ssi $\rho = \rho' = 0$ ...)

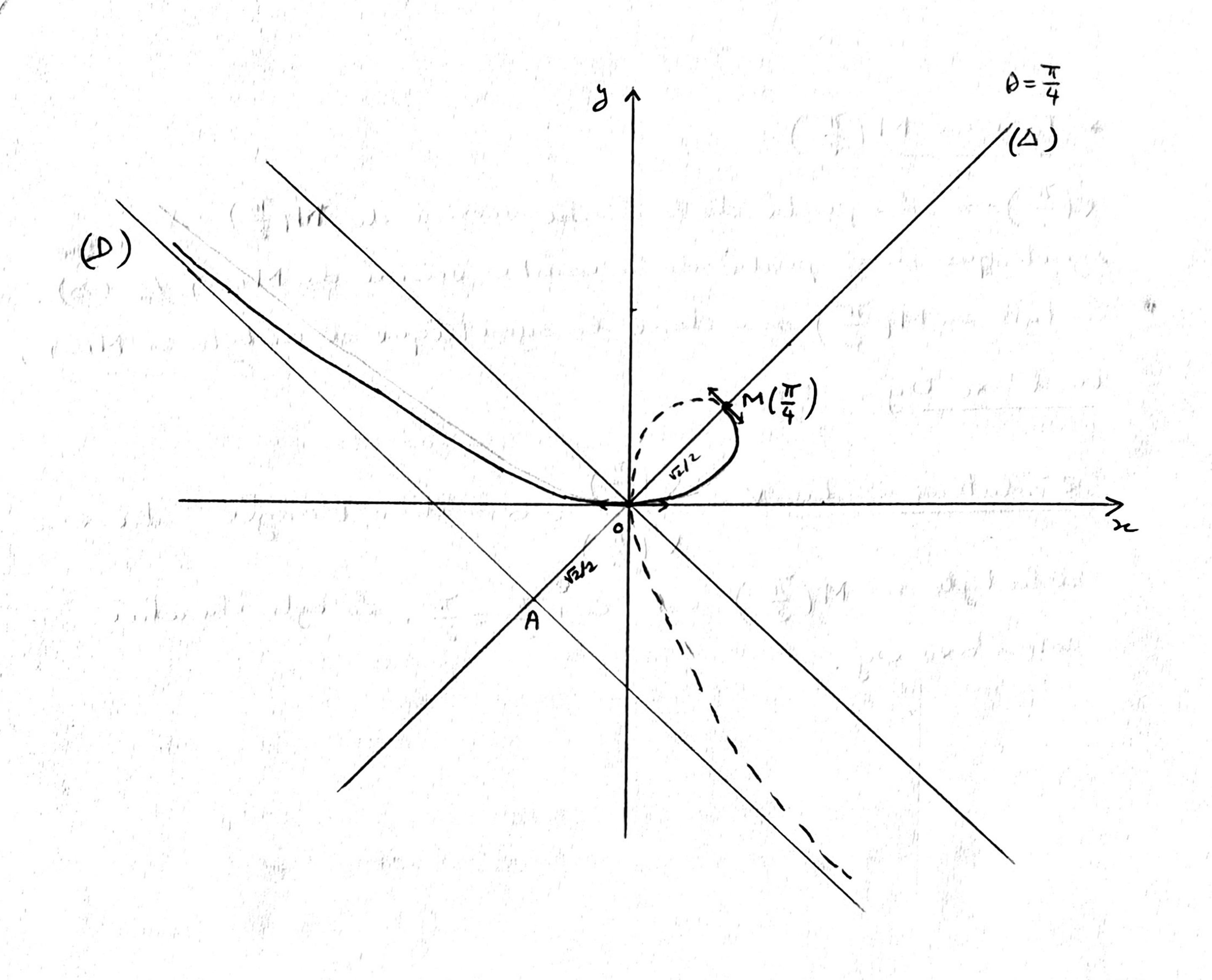
<u>La tangente en $M(0)$ sera horizontale</u> (car $\vec{OM}'(0) = \rho'(0)\,\vec{u}_0 = 2\vec{i}$)

* <u>Tangente en $M(\frac{\pi}{4})$</u> :



$$\tan V = \frac{\rho(\pi/4)}{\rho'(\pi/4)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{0} = +\infty$$

La tgte en $M(\frac{\pi}{4})$ est perpendiculaire à $(OM(\frac{\pi}{4}))$



* <u>Etude pour $\theta \to -\frac{\pi}{4}$</u> :

Alors $\lim\limits_{\theta \to -\frac{\pi}{4}} \rho(\theta) = -\infty$. On se place dans le repère $(O, \vec{u}_{-\frac{\pi}{4}}, \vec{v}_{-\frac{\pi}{4}})$

où les coordonnées de $M(\theta)$ sont :

$$\begin{cases} X = \rho(\theta)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow -\infty \\ Y = \rho(\theta)\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}} \longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq -0,7 \quad (\theta \to -\frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

La droite d'équation $Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ est asymptote à la courbe.
C'est la dte (D) perpendiculaire à (Δ) passant par le point A symétrique de $M(\frac{\pi}{4})$ /à O. (cf figure)

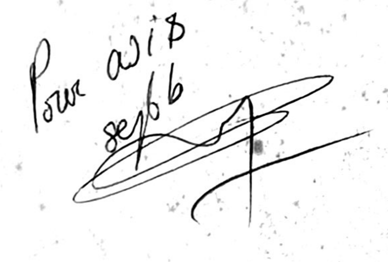
* Tgte en $M(\frac{\pi}{2})$:

$\rho(\frac{\pi}{2})=0$. La partie de la courbe voisine de $M(\frac{\pi}{2})$ est symétrique de la partie de la courbe voisine de $M(0)$ /à (Δ). La tgte en $M(\frac{\pi}{2})$ sera donc la symétrique de la tgte en $M(0)$, ie l'axe Oy.

2e solution : $\tan V = \dfrac{\rho(\frac{\pi}{2})}{\rho'(\frac{\pi}{2})} = 0$ donc l'angle entre Ox et la tgte en $M(\frac{\pi}{2})$ est $0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. La tgte cherchée est l'axe Oy.

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES
Département de Mathématiques/Informatique

Session de Septembre 1993 — **U.V.M12 (Algèbre/Analyse)**
Deug A_1 - 1re année — Durée 3 heures



PARTIE II *(Analyse)* **(11 pts)**

Exercice 1 (6 pts)

Soit α un réel strictement positif , on considère pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ la fonction f_n définie pour tout réel t par $f_n(t) = e^{-nt^2}$ et la suite U définie par

$$U_n = \int_0^\alpha f_n(t)\,dt.$$

1°) Pour n fixé, étudier les variations de la fonction f_n

2°) Justifier l'existence de la suite U, calculer $U_{n+1} - U_n$, en déduire que la suite U est convergente .

3°) Pour tout $n \geq 2$, montrer que : $\int_0^{\frac{1}{\text{Ln } n}} f_n(t)\,dt \leq \frac{1}{\text{Ln } n}$

4°) a) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 2$ tel que : pour $n \geq n_0$ on ait, $\frac{1}{\text{Ln } n} < \alpha.$

b) Montrer que pour $n \geq n_0$, on a : $\int_{\frac{1}{\text{Ln } n}}^{\alpha} f_n(t)\,dt \leq \left(\alpha - \frac{1}{\text{Ln } n}\right) e^{\frac{-n}{(\text{Ln } n)^2}}$

5°) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{(\text{Ln } x)^2}$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$)

b) Déduire des questions précédentes la limite de la suite U .

Exercice 2 (5 pts)

Etudier et représenter graphiquement la courbe, dont une équation polaire est :

$$f(\theta) = \rho = \frac{\sin 2\theta}{\cos\theta + \sin\theta}.$$

On montrera en particulier l'existence d'une symétrie par rapport à la droite $\theta = \pi/4$ et on précisera la tangente aux points de paramètre $\theta = \pi/4$; $\theta = \pi/2$.

Branche infinie d'une courbe en polaire

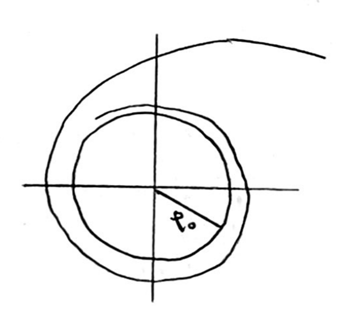
$\rho = \rho(\theta)$ définit une courbe en polaire $\mathcal{C}$

Il y aura branche infinie dans l'un des cas suivants :

(1) $\rho(\theta)$ est défini pour θ voisin de $\pm\infty$

(2) $\lim_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta) = \pm\infty$ (où $\theta_0 \in \mathbb{R}$)

Cas (1)

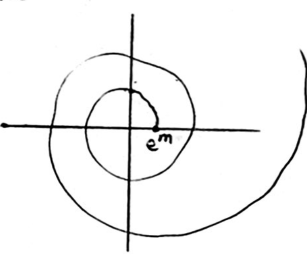


- Si $\lim_{\theta \to \pm\infty} \rho(\theta) = \rho_0 \in \mathbb{R}$, on a un cercle asymptote et une branche spirale. La courbe s'enroule autour du cercle-asymptote

- Si $\lim_{\theta \to \pm\infty} \rho(\theta) = \pm\infty$, on a une spirale → exemple 1 : type logarithmique $\rho = e^{m\theta}$ avec m

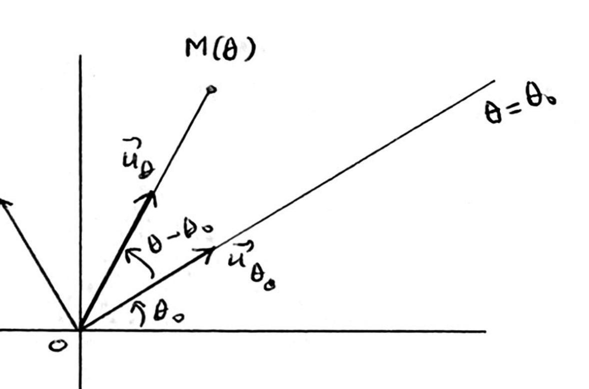
exemple 2 : Spirale d'Archimède : $\rho = \theta$





Cas (2)

On se place dans le repère $\mathcal{R}_{\theta_0} \doteq (O, \vec{u}_{\theta_0}, \vec{v}_{\theta_0})$ où $\vec{v}_{\theta_0} = \vec{u}'_{\theta_0}$



$\vec{OM}(\theta) = \rho \vec{u}_\theta = \rho\cos(\theta-\theta_0)\vec{u}_{\theta_0} + \rho\sin(\theta-\theta_0)\vec{v}_{\theta_0}$

Notons $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ les coordonnées de $M(\theta)$ dans le repère $\mathcal{R}_{\theta_0}$. On a :

$$\begin{cases} X = \rho\cos(\theta - \theta_0) \\ Y = \rho\sin(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

On étudie alors la branche infinie comme celle d'un arc paramétré. Si $\lim_{\theta \to \theta_0} X = \lim_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta) \cos(\theta - \theta_0) = \pm\infty$, et :

1) Si $\lim_{\theta \to \theta_0} Y = k \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $Y = k$ dans le repère $\mathcal{R}_{\theta_0}$ sera asymptote

2) Si $\lim_{\theta \to \theta_0} Y = \pm\infty$, on constate :

$$\lim_{\theta \to \theta_0} \frac{Y}{X} = \lim_{\theta \to \theta_0} \tan(\theta - \theta_0) = 0$$

donc $\mathcal{C}$ admet seulement une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des X, ie l'axe $\theta = \theta_0$.

Cardioïde

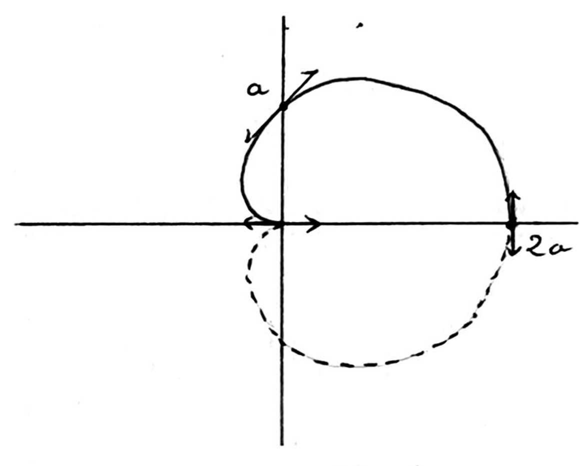
Etude et graphique de

$$\rho = a(1+\cos\theta) \qquad a>0$$

* ρ est périodique de période 2π. Comme $\rho(-\theta)=\rho(\theta)$, on pourra étudier ρ pour $t \in [0,\pi]$ et compléter par symétrie /à Ox.

* $\rho' = -a\sin\theta < 0$

θ	0		π
ρ'		$-$	
ρ	$2a$	$\searrow$	0



* tangente en $M(0)$:

$\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{2a}{0} = +\infty$ et la tangente sera verticale.

* tgte en $M(\frac{\pi}{2})$:

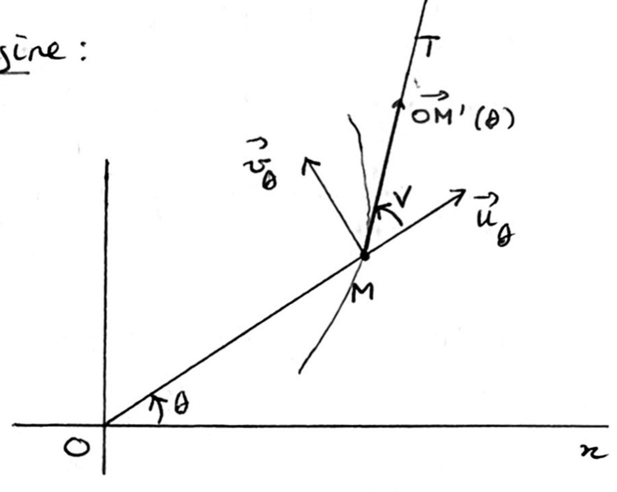
$\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{a}{-a} = -1$ et la tgte en $M(\frac{\pi}{2})$ sera // à la 1re bissectrice.

* tgte en $M(\pi)$:

$\rho(\pi)=0$, $\rho'(\pi)=0$ mais $\rho''(\pi)=a\neq 0$. La tangente en $M(\pi)=O$ sera l'axe polaire $(O,\vec{u}_\pi)$, ie horizontale.

Tangente à une courbe en polaire

1) Tgte en un pt autre que l'origine :



$\rho = \rho(\theta)$

$\vec{OM}(\theta) = \rho(\theta) . \vec{u}_\theta$

$\vec{OM}'(\theta) = \rho' \vec{u}_\theta + \rho \vec{v}_\theta$

où $\vec{v}_\theta \doteq \vec{u}'_\theta = \dfrac{d u_\theta}{d\theta} = \vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$.

$\vec{OM}'(\theta)$ sera toujours non nul puisque par hypothèse $\rho(\theta) \neq 0$. L'angle V entre $\vec{u}_\theta$ et $\vec{OM}'(\theta)$ sera tel que

$$\tan V = \tan(\vec{u}_\theta , \vec{OM}'(\theta)) = \frac{\rho}{\rho'}$$

ce qui détermine parfaitement V à π près, donc T.

En angles de droites, on aura :

$$(Ox, T) = (Ox, \vec{u}_\theta) + (\vec{u}_\theta, T)$$
$$= \theta + V \qquad [\pi]$$

Retenir : $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$ donne $V = (\vec{u}_\theta , T) \quad [\pi]$

…/…

2) Tgte à l'origine :

Les seuls points d'une courbe en polaire pouvant être stationnaire est l'origine.

Supposons que la courbe passe par O. Alors $\rho(\theta_0) = 0$.

- Si $\rho'(\theta_0) \neq 0$, $\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = 0$ prouve que $T = (O, \vec{u}_{\theta_0})$

$(O, \vec{u}_{\theta_0})$ est ce qu'on appelle "l'axe polaire" en θ_0.

- Si $\rho'(\theta_0) = 0$, retournons aux vecteurs susceptibles de diriger la tangente :

$$\vec{OM}(\theta) = \rho \cos\theta\, \vec{i} + \rho \sin\theta\, \vec{j} = \rho\, \vec{u}_\theta$$

$$\vec{OM}'(\theta) = \rho'\, \vec{u}_\theta + \rho\, \vec{u}_\theta'$$

$$\vec{OM}''(\theta) = \rho''\, \vec{u}_\theta + 2\rho'\, \vec{u}_\theta' + \rho\, \vec{u}_\theta'' \qquad \text{avec } \vec{u}_\theta'' = -\vec{u}_\theta$$

...

Ici $\vec{OM}'(\theta_0) = 0$

$\vec{OM}''(\theta_0) = \rho''(\theta_0) . \vec{u}_{\theta_0}$

Si $\rho''(\theta_0) \neq 0$, $\vec{OM}''(\theta_0)$ et donc $\vec{u}_{\theta_0}$ dirige la tgte

Si $\rho''(\theta_0) = 0$
$\vec{OM}'''(\theta_0) = \rho'''(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0}$

Si $\rho'''(\theta_0) \neq 0$
$\vec{u}_{\theta_0}$ dirigera la tgte

Si $\rho'''(\theta_0) \neq 0$
$\vec{OM}^{(4)}(\theta_0) = \rho^{(4)}(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0}$

etc

Retenir : Si $\rho(\theta_0) = 0$, et s'il existe $k \geq 1$ tq $\rho^{(k)}(\theta_0) \neq 0$ (ce qui est le cas le plus général !), alors l'axe polaire $(O, \vec{u}_{\theta_0})$ est la tangente à $M(\theta_0) = O$.

Etudier et représenter la courbe : $\rho = \dfrac{ch\,\theta}{sh\,\theta - ch\,\theta}$

$\rho(\theta)$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $sh\,\theta < ch\,\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\rho = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{e^{\theta}-e^{-\theta}-(e^{\theta}+e^{-\theta})} = -\frac{1}{2}\left(1+e^{2\theta}\right)$$

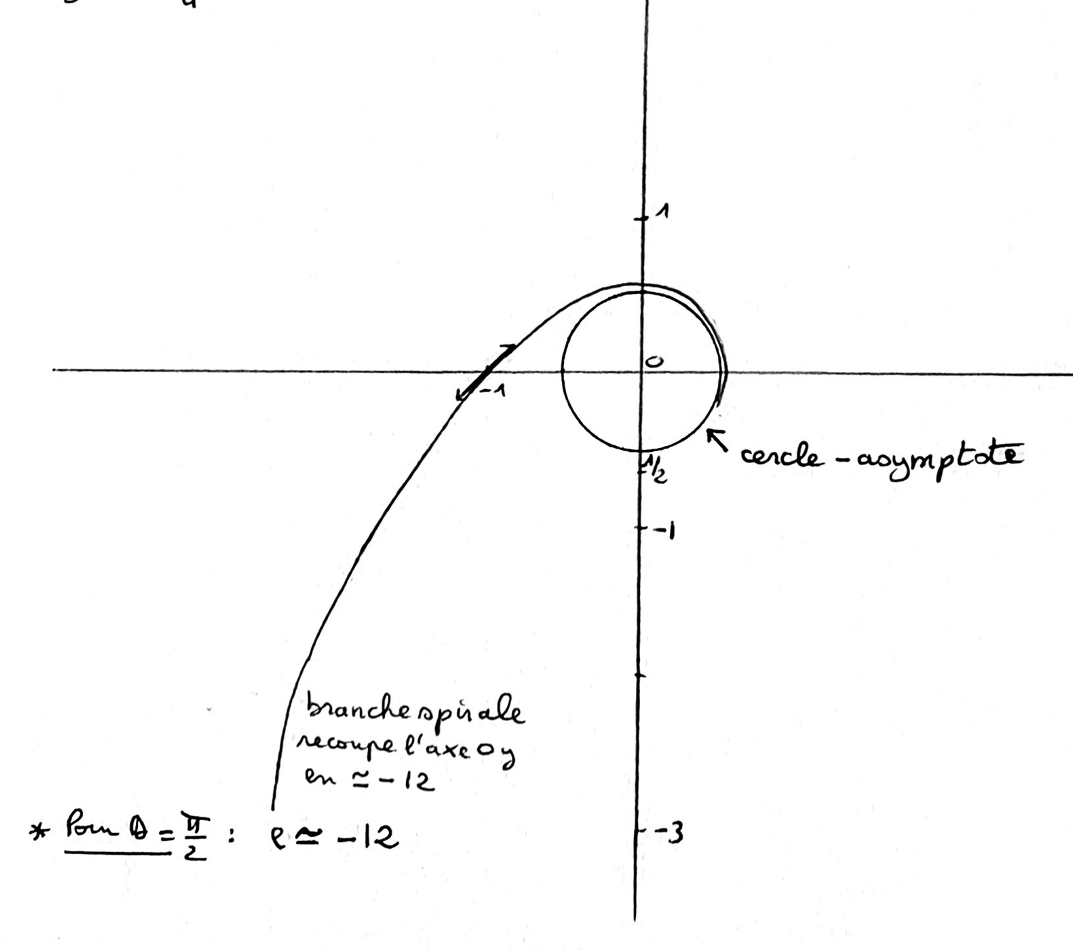
$\rho' = -e^{2\theta} < 0$ donc

θ	$-\infty$		$+\infty$
ρ'		$-$	
ρ	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

La courbe aura l'allure d'une spirale pour $\theta \to +\infty$.

Comme $\lim\limits_{\theta \to -\infty} \rho(\theta) = -\frac{1}{2}$, le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$ sera cercle-asymptote quand $\theta \to -\infty$.

* Pour $\theta = 0$: $\rho = \rho' = -1 \Rightarrow \frac{\rho}{\rho'} = 1 \Rightarrow V = \frac{\pi}{4}$. La tgte à $M(0)$ fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ / à Ox.



* Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\rho \simeq -12$

(réf. Deug 1re année 92-93)(93-94)

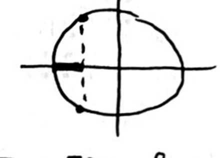
Etudier la courbe dont une équation en polaire est :

$$\rho = \frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$\rho = \dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}$ est périodique de période 2π, et définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

L'étude se fera pour $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$.

$$\rho' = \frac{-1+\sin\theta-\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2} = -\frac{1+\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{(1+\cos\theta)^2}$$



De sorte que $\rho' \geq 0 \iff \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \frac{3\pi}{4} + k2\pi \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4} + k2\pi$

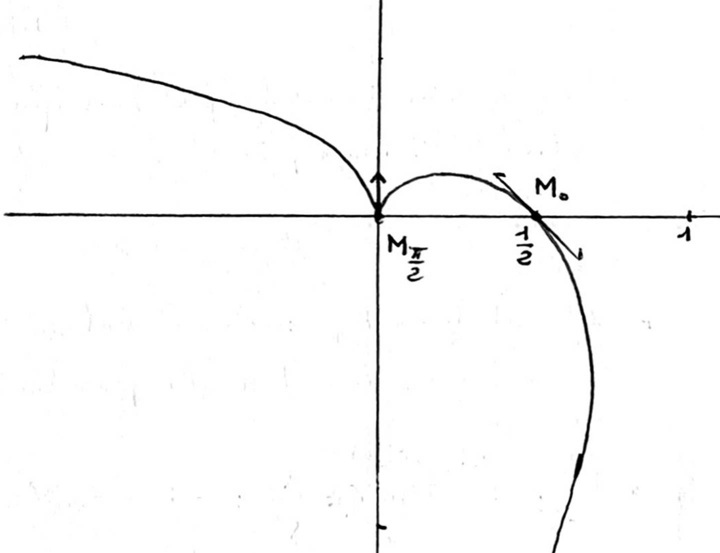
$\iff \frac{\pi}{2} + k2\pi \leq \theta \leq \pi + k2\pi$

En se plaçant dans $[0, 2\pi]$, on aura :

$$\rho' \geq 0 \iff \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$

donc le tableau de variation :

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π		2π
ρ'	$-$	0	$+$ ‖	$-$	
ρ	$\frac{1}{2}$	0	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$



* M_0 : $\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = -1 \Rightarrow V = -\frac{\pi}{4}$

La tgte en M_0 fait donc un angle de $-\frac{\pi}{4}$ avec le vecteur $\vec{u}_0 = \vec{i}$ (on pose $\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = \frac{d}{d\theta}\vec{u}_\theta = \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$ comme d'habitude)

* $M_{\frac{\pi}{2}}$: La courbe passe par l'origine du repère.

On a $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \rho'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc $\overrightarrow{OM}'(\theta) = \rho'\vec{u}_\theta + \rho\vec{u}_\theta'$ est nul en $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ce point est stationnaire.

Mais $\overrightarrow{OM}''(\theta) = (\rho''-\rho)\vec{u}_\theta + 2\rho'\vec{u}_\theta' \Rightarrow \overrightarrow{OM}''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \rho''\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{u}_\theta$ qui n'est pas nul.

La tgte en $M_{\frac{\pi}{2}} = 0$ sera donc orientée par $\vec{u}_{\frac{\pi}{2}}$, ie verticale.

* Quand $\theta \to \pi_-$: $\lim_{\theta \to \pi_-} \rho = +\infty$ donc la courbe admet la direction asymptotique $\mathbb{R}\vec{u}_\pi = (Ox)$ quand $\theta \to \pi_-$. Y-a-t'il une asymptote ?

1re méthode : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \to -\infty \\ y = \rho\sin\theta = \dfrac{(1-\sin\theta)\sin\theta}{1+\cos\theta} \to +\infty \quad (\theta \to \pi_-) \end{cases}$ d'après la règle de l'Hôpital.

On a $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \to 0_- \quad (\theta \to \pi_-)$.

Il y aura donc branche parabolique de dir. asymptotique l'axe des x quand θ tend vers π_-

2e méthode : Dans le repère $(O, \vec{u}_\pi, \vec{v}_\pi)$, on a :

$$\begin{cases} X(\theta) = \rho(\theta).\cos(\theta-\pi) \to +\infty \quad (\theta \to \pi_-) \\ Y(\theta) = \rho(\theta)\ \sin(\theta-\pi) \end{cases}$$

$$Y(\theta) = \frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}\sin(\theta-\pi) = \frac{1+\sin t}{1-\cos t}\sin t \quad \text{en posant } t = \theta-\pi \to 0_-$$

$$\text{Soit } \lim_{\theta\to\pi_-} Y(\theta) = \lim_{t\to 0_-} \frac{\sin t + \sin^2 t}{1-\cos t} = \lim_{t\to 0_-} \frac{\cos t + 2\sin t\cos t}{\sin t} = -\infty$$

(Règle de l'Hôpital)

Il y a donc branche parabolique de direction asymptotique $\mathbb{R}\vec{u}_\pi = (Ox)$ (Ramis V 1.4.2 p53)

* Quand $\theta \to \pi_+$: les m̂ calculs que ci-dessus sont valides (à part les signes). Il y a encore une branche parabolique de dir. asymp. l'axe des x.

* $M_{\frac{3\pi}{2}}$: $\rho(\frac{3\pi}{2}) = 2$ et $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'} = -1 \Rightarrow V = -\dfrac{\pi}{4}$. La tangente T à la courbe en $M_{\frac{3\pi}{4}}$ fera un angle de $-\frac{\pi}{4}$ avec $\vec{u}_{\frac{3\pi}{2}}$: $\widehat{\vec{u}_{\frac{3\pi}{2}}, T} = -\dfrac{\pi}{4}$

* $M_{2\pi}$: $\rho(2\pi) = \dfrac{1}{2}$ et $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'} = -1 \Rightarrow \widehat{\vec{u}_{2\pi}, T} = -\dfrac{\pi}{4}$

La tangente en $M_{2\pi}$ est la m̂ que la tgte en M_0. La courbe obtenue sera donc lisse en $M_0 = M_{2\pi}$.